Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра системного программирования

Вычисление объема трехмерного объекта в задаче планирования хирургической операции

Курсовая работа студента 361 группы
Монькина Сергея Александровича

Научный руководитель Петров А.Г.

Санкт-Петербург
2012

Оглавление

Введение

Для определенных задач пластической хирургии необходимо оценивать площадь поверхности на теле пациента и сравнивать объемы покровных тканей симметричных областей тела.

Необходим плагин для фреймворка анализа и планирования пластических операций, с помощью которого можно вычислять объем и площадь поверхности трехмерного объекта.

Постановка задачи:

Для вычисления объема и площади поверхности используется незамкнутый трехмерный объект, гранями которого являются треугольники. Плагин должен позволять:

- выделить область на объекте;
- вычислить объем выделенной на объекте области;
- вычислить площадь поверхности выделенной на объекте области.

Обзор существующих подходов вычисления объема

Вычисление объема замкнутого трехмерного объекта известной формы происходит по простым геометрическим формулам от известных параметров, либо интегралами по ограничивающим поверхностям. Например, объем куба вычисляется по известной стороне, сферы – по известному радиусу, более сложных объектов – интегралами по известным уравнениям поверхностей. Аналогично для составных объектов. Для вычисления объема произвольного замкнутого трехмерного объекта существует не так много подходов, т.к. здесь, в общем случае, известны только координаты вершин и грани, составляющие объект, поэтому можно выделить подходы, основанные на разбиении объекта на примитивы, тетраэдрах, формуле Гаусса-Остроградского. Подходы, основанные на заполнении пространства объекта объектами известного объема, не рассматриваются.

Разбиение трехмерного объекта на множество примитивов

Подход основан на разбиении объекта трехмерной сеткой. Объект разбивается на множество примитивов – тетраэдров, пирамид, кубов (рис. 1), объем которых вычисляется по известным формулам. Объем объекта равен сумме объемов этих примитивов или, если есть одинаковые примитивы, сумме произведений объемов уникальных примитивов на их количество.

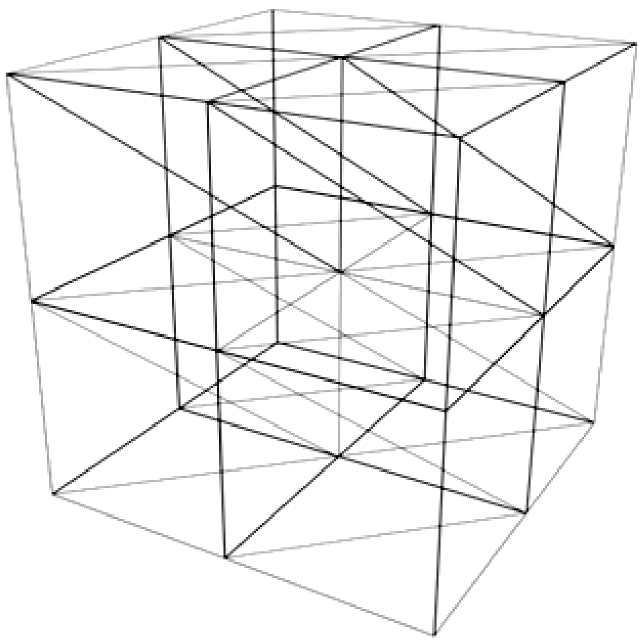

Рис. 1

Сложность зависит от числа вершин, составляющих объект и способа построения трехмерной сетки.

Тетраэдры

Подход основан на вычислении объемов тетраэдров. Из произвольной точки в пространстве строятся тетраэдры ко всем треугольникам, образующим поверхность объекта (рис. 2). Объем объекта равен сумме объемов тетраэдров со знаками “+” и “-“ в зависимости от направлений нормалей треугольников.

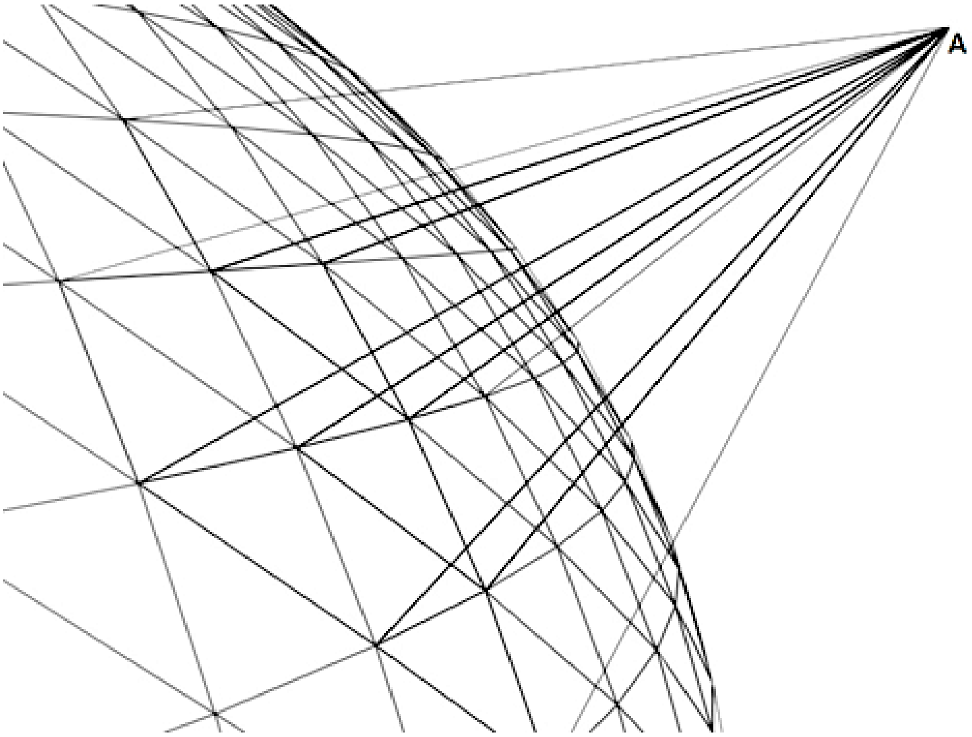

Рис. 2

Если объект выпуклый, можно строить тетраэдры из вершины, находящейся внутри объекта. В этом случае не нужно учитывать направления нормалей треугольников.

Формула для вычисления объема тетраэдра, вершины которого находятся в точках (x1, y1, z1), (x2, y2, z2), (x3, y3, z3), (x4, y4, z4):

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x1 & y1 & z1 \\ 1 & x2 & y2 & z2 \\ 1 & x3 & y3 & z3 \\ 1 & x4 & y4 & z4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x1 - x2 & y1 - y2 & z1 - z2 \\ x1 - x3 & y1 - y3 & z1 - z3 \\ x1 - x4 & y1 - y4 & z1 - z4 \end{vmatrix}$$

Если поверхность состоит из четырехугольников, строятся пирамиды и объем объекта получается из суммы объемов пирамид.

Сложность зависит от числа граней, составляющих поверхность объекта.

Формула Гаусса-Остроградского

Подход основан на применении формулы Гаусса-Остроградского, подробно описан в работе [1]. Формула Гаусса-Остроградского выражает поток векторного поля F через замкнутую поверхность S интегралом от дивергенции этого поля по объёму V, ограниченному этой поверхностью (рис. 3).

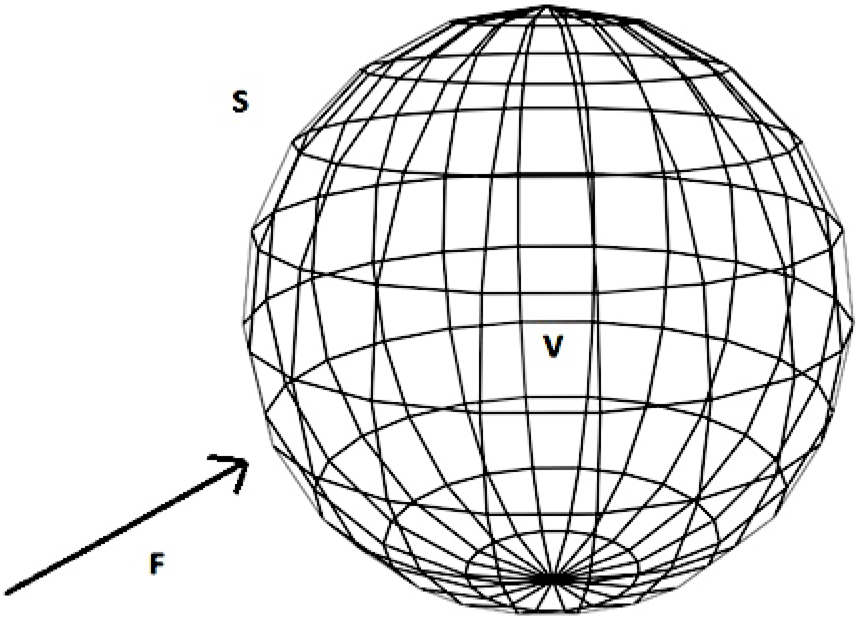

Рис. 3

Формула Гаусса-Остроградского:

$$\iiint\limits_{V} \mathrm{div}\, F\, dV = \oiint\limits_{S} F\, dS$$

Дивергенция — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное, который определяет, насколько расходятся входящий и исходящий поток.

Дивергенция (x, y, z – координаты):

$$\mathrm{div} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Из этих формул выводится формула для вычисления объема объекта, гранями которого являются треугольники i с вершинами v1, v2, v3 в координатах (x, y, z):

$$V = \frac{1}{6}\sum_{i}((i_{v2y} - i_{v1y}) * (i_{v3z} - i_{v1z}) - (i_{v2z} - i_{v1z}) * (i_{v3y} - i_{v1y})) * (i_{v1x} + i_{v2x} + i_{v3x})$$

Реализация

Для вычисления объема и площади поверхности используется незамкнутый трехмерный объект (рис. 4). Он замыкается по точкам или целиком, вычисление происходит по замкнутому объекту.

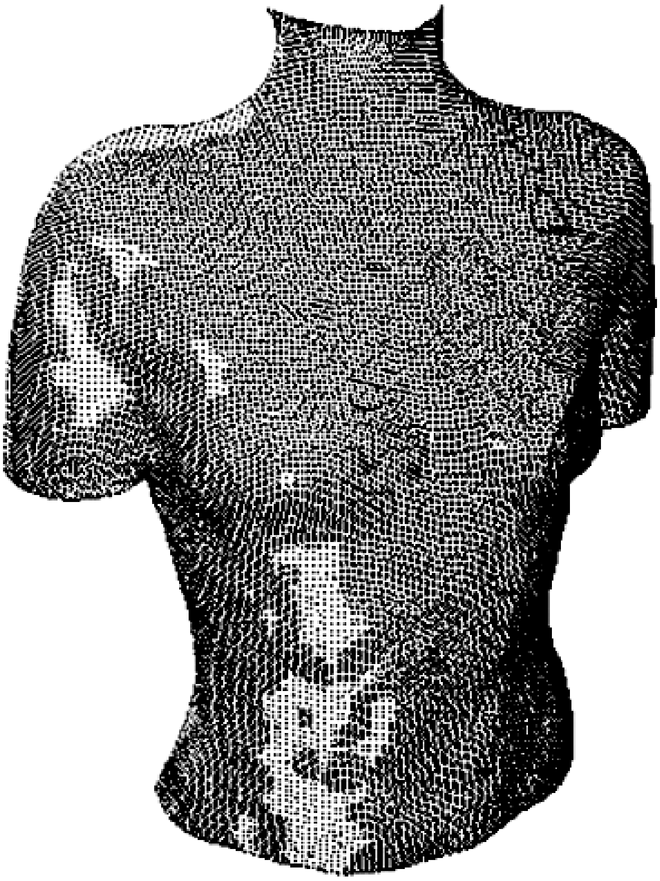

Рис. 4

Выделение области на трехмерном объекте:

- установка точек на поверхности трехмерного объекта: точки задаются либо вручную, либо из файла;
- создание замкнутого сплайна по установленным точкам, создание призмы по сплайну: направление призмы задается установленными точками, по ней определяются вершины объекта (область);
- замыкание выделенной области.

Вычисление объема:

- объем вычисляется алгоритмом, основанным на формуле Гаусса-Остроградского.

Вычисление площади поверхности:

- площадь поверхности равна сумме площадей треугольников.

Обзор существующих программных средств

Существуют программные средства, специально разработанные для вычисления объема и площади поверхности трехмерного объекта, но они, в основном, позволяют работать только с объектами определенного вида, объем которых можно вычислить по известным параметрам или функциям. Объем и площадь поверхности объекта произвольной формы позволяют вычислять системы для работы с трехмерной графикой. Вычисление объема и площади поверхности не является их основной возможностью. Среди некоммерческих можно выделить MeshLab [2], систему с открытым исходным кодом для обработки трехмерных объектов. Существуют программные средства, такие как Blender [3], система с открытым исходным кодом для создания и редактирования трехмерной графики и анимации, для которых вычисление объема и площади поверхности реализовано дополнительными плагинами, но возможности этих средств сильно ограничены и пользоваться ими достаточно сложно.

Заключение

Реализован плагин к фреймворку анализа и планирования медицинских операций для вычисления объема и площади поверхности трехмерного объекта, позволяющий выделять область на объекте, вычислять объем и площадь поверхности заданной области.

Рассмотрены приложения MeshLab, Blender, позволяющие вычислять объем и площадь поверхности.

Рассмотрены системы wxWidgets, Ogre, использовавшиеся при реализации плагина.

Ссылки

[1] S. W. et al Hughes. Application of a new discreet form of gauss' theorem for measuring volume. Phys. Med. Biol., 41:18091821, 1996

[2] http://meshlab.sourceforge.net

[3] http://blender.org