

Построение квадратурных формул наивысшей степени точности обращения преобразования Лапласа

Пийтер Д.С., СПбГУ, Санкт-Петербург piyterds@gmail.com,
Рябов В.М., СПбГУ, Санкт-Петербург victor.ryabov@mail.ru

Аннотация

Преобразование Лапласа широко используется в различных сферах науки и техники. Возникает задача его обращения, то есть задача восстановления функции-оригинала по известной функции-образу. Возможные сферы применения: механика и робототехника, цифровая обработка сигналов, анализ экономических процессов. Общего универсального способа обращения не существует. Существующие подходы к решению проблемы имеют свои достоинства и недостатки. Так аналитический подход во многом основывается на таблицах обращения и малоприменимы к реальным задачам. Численные методы нередко страдают от высокой трудоемкости или недостаточной точности. В данной работе рассматривается обращение преобразования Лапласа с помощью построения квадратурных формул наивысшей степени точности для интеграла Римана-Меллина. В результате работы была успешно создана программа для построения КФНСТ размером до 400 узлов, которая позволяет с различной точностью и быстродействием обращать преобразование Лапласа. Перспективы исследования заключаются в оптимизации работы ПО и его адаптации для более широкого круга пользователей.

Введение

Преобразование Лапласа - известный с 18-го века математический инструмент, который широко используется для решения дифференциальных уравнений и анализа линейных систем [1].

В прикладных задачах появляется необходимость обращения преобразования Лапласа, то есть восстановления функции-оригинала $f(t)$ при известном образе $F(p)$. Общего универсального способа обращения не существует. Существующие подходы к решению проблемы имеют свои достоинства и недостатки.

Стоит отметить, что задача обращения преобразования Лапласа состоит в решении интегрального уравнения первого рода, то есть является некорректной. Это отражается в следующих свойствах:

1. **Особенности функции-оригинала:** В случаях присутствия в функции-оригинале разрывов первого рода данный метод обращения, ввиду нахождения решения, как линейной комбинации образа и его производных, являющимися бесконечно гладкими функциями, в точках разрыва будет возвращать только полусумму левого и правого пределов. Для нахождения точек разрыва и величин скачка оригинала можно воспользоваться методом, описанным в [2].
2. **Теорема о единственности:** Согласно теореме, описанной в [3], если $f(t)$ является кусочно-гладкой и удовлетворяет условиям Больцано-Вейерштрасса, то можно гарантировать единственность решения.

Обзор существующих методов обращения и их особенностей

Существует множество различных методов обращения преобразования Лапласа, как аналитических, так и приближённых.

Аналитические методы, такие как таблицы обращения, теоремы разложения и др. ([4]), хоть и по сути точны, в большинстве своём неприменимы к использованию в практических задачах.

Приближенные методы:

- Приближение с помощью рядов Лагерра - как описано в [5] сходимость метода медленная.
- Дельта-метод обращения преобразования Лапласа высокого порядка точности - коэффициенты быстро растут с увеличением степени точности ([6]).
- ИКФ с равноотстоящими узлами - требует меньше вычислений, но недостаточно точна ([5]).

Поскольку все вычислительные методы обращения преобразования Лапласа либо трудозатратны, либо недостаточно точны, было принято решение использовать квадратурные формулы наивысшей степени точности для приближения интеграла Римана-Меллина. Скорость их сходимости описана в [7]

и составляет

$$O\left(n^{1-s}\left(\frac{3.764}{n^2}\right)^n\right),$$

а устойчивость КФНСТ по отношению к ошибкам в функции $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ определяется величиной

$$M_n = \sum_{k=1}^n |A_k| = O(n^{1-s} 3.764^n).$$

Соответственно, необходимо будет провести проверку полученного набора коэффициентов.

Математическое основание

Дано уравнение

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p), \quad (1)$$

где $f(t)$ – искомая функция, $F(p)$ – её образ по Лапласу. Изображение $F(p)$, как известно, регулярно при $\operatorname{Re} p > \sigma$, при некотором σ . Не умаляя общности, можем предположить, что $\sigma = 0$ ($F^*(p) = F(p - \sigma)$, $f^*(t) = e^{\sigma t} f(t)$). Также известно, что $F(p) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$. Предположим, что $F(p)$ стремится к нулю, как некоторая степень $1/p$, то есть образ представим в виде $F(p) = \frac{1}{p^s} \varphi_s(p)$, где $s > 0$, а $\varphi_s(\infty)$ существует и конечна.

Обращение преобразования Лапласа производится по формуле Римана-Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad c > 0, \quad t > 0. \quad (2)$$

Перепишем её для нашей $F(p)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi_s(p) dp = t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s(p/t) dp, \quad c > 0. \quad (3)$$

Для приближенного вычисления интеграла (3) построим квадратурную формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_{kn} \varphi(p_{kn}). \quad (4)$$

Теорема 1 ([5]). Для того, чтобы квадратурная формула (4) была наивысшей степени точности, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Формула (4) была интерполяционной. То есть для попарно различных p_{kn} выполнялось

$$\sum_{k=1}^n A_{kn} p_{kn}^{-m} = \frac{1}{\Gamma(s+m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Выполнялись условия ортогональности

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n \left(\frac{1}{p} \right) p^{-m} dp = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$\omega_n \left(\frac{1}{p} \right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_{kn}} \right). \quad (6)$$

В итоге получаем, что для существования квадратурной формулы наивысшей степени точности для приближения интеграла (3), необходимо и достаточно существования многочленов (6), для которых выполняются условия (5).

Теорема 2 ([8]). Многочлены (6) удовлетворяют уравнению

$$B(x)\omega_n''(x) + [A(x) + B'(x)]\omega_n'(x) - n(n+s-1)\omega_n(x) = 0, \quad (7)$$

$$B(x) = x^2, \quad A(x) = (s-2)x - 1.$$

Многочлены $\omega_n(p)$ с точностью до постоянного множителя совпадают с многочленами

$$P_n^s(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k x^k,$$

где $(a)_k$ - символ Похгаммера:

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ a(a+1) \cdots (a+k-1), & k \geq 1, \end{cases}$$

и их корни попарно различны и имеют положительную действительную часть.

Исходя из всего вышеизложенного, можем сделать вывод, что искомая КФНСТ существует, единственна и имеет вид

$$f(t) \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^n A_{kn} \varphi_s(p_{kn}/t), \quad (8)$$

где узлы p_{kn} – корни уравнения $P_n^s(1/p_{kn}) = 0$, попарно различны и лежат в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, а коэффициенты A_{kn} вычисляются [9] по формуле:

$$A_{kn} = \frac{(-1)^{n+1} n! (2n + s - 2)^2}{n^2 \Gamma(n + s - 1) p_{kn}^2 (P_{n-1}^s(1/p_{kn}))^2}.$$

При увеличении количества узлов программы, использующие стандартные встроенные математические пакеты нахождения корней многочленов, теряют точность и увеличивают время своей работы. Для избежания данной проблемы можно прибегнуть к использованию метода Ньютона.

Как показано в работах [10], узлы КФНСТ лежат в правой половине кольца

$$n + s - 1 \leq |p_{kn}| < 2n + s - \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Положим

$$z_{kn} = -(2n + s - 2)/p_{kn}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Нормированные корни z_{kn} при $n \rightarrow \infty$ стремятся к точкам кривой

$$\gamma = \{z : |\Omega(z)| = 1, \quad \operatorname{Re} z < 0\},$$

$$\text{где } \Omega(z) = \exp\left(\sqrt{1 + z^{-2}}\right) / \left[z\left(1 + \sqrt{1 + z^{-2}}\right)\right].$$

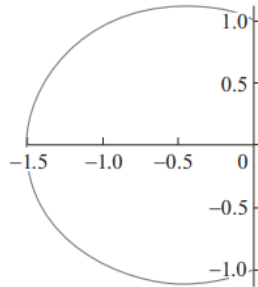


Рис. 1: Кривая $\gamma(z)$

Также было показано, что аргументы корней многочлена $P_n^s(-x)$ распределяются равномерно в интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$.

Используя информацию о примерном расположении корней многочлена, воспользуемся методом Ньютона для их поиска.

Программная реализация

Для вычисления узлов КФНСТ и соответствующих коэффициентов, исходя из рассмотренной ранее теории, требуется найти корни многочлена вида

$$P_n^s(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+s-1)_k x^k,$$

где $(a)_k$ - символ Похгаммера.

Реализация вычислений будет происходить с помощью языка программирования Python, поскольку данный язык является пригодным для тонкой настройки параметров и удобным в использовании.

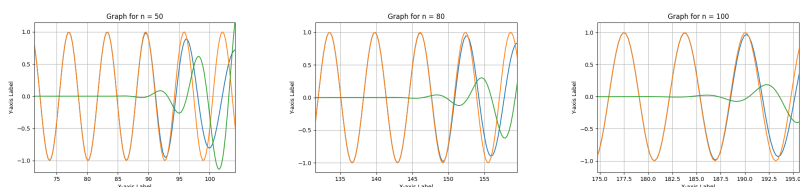
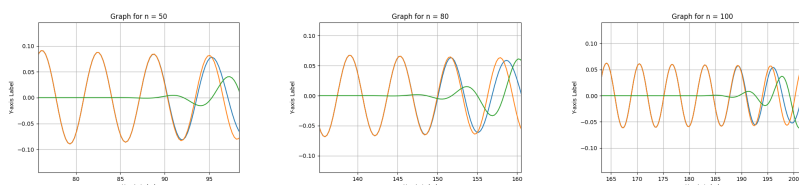
Вычисления требуют достаточно высокой точности, поэтому для хранения чисел и выполнения действий над ними задействуем библиотеку для работы с числами с большим количеством знаков после запятой - "mpmath". Также нам понадобится библиотека для реализации метода вычисления количества сочетаний и метода вычисления гамма-функций и бета-функций - "Scipy". Для визуализации графиков задействуем библиотеку "matplotlib.pyplot". Сохранение результатов реализуем с помощью "pickle".

Результаты

В результате работы программы, с кодом которой можно ознакомиться в открытом репозитории [11], были получены наборы узлов и коэффициентов для КНФСТ размером от 2 до 400 узлов (при $s=1$). Это позволяет обращаться преобразование Лапласа с разной точностью. Рассмотрим полученные результаты на конкретных примерах.

Рассмотрим графики обращений уже известных функций. На рисунках 2, 3 представлены графики синуса и функции Бесселя, вычисленные с помощью обращения преобразования Лапласа и вычисленные точно, а также их разность. Отклонение появляется на значениях выше некоторого значения, которое можно увеличить за счёт повышения количества узлов, однако время вычисления также повысится (время работы программы по вычислению 1000 точек обращения преобразования Лапласа в зависимости от количества узлов указано на графике 4).

На рисунках используется цветовое обозначение: оранжевый - точно вычисленная функция, синий - функция полученная в результате обращения, зеленый - их разность.

Рис. 2: Синус при $n=50$, $n=80$, $n=100$ Рис. 3: Функция Бесселя при $n=50$, $n=80$, $n=100$

Выводы

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. **Результат реализации алгоритма:** требуемые узлы и коэффициенты КФНСТ могут быть достаточно быстро вычислены при использовании метода Ньютона и информации об их примерном местонахождении на комплексной плоскости.
2. **Применимость и универсальность:** КФНСТ способна обращать преобразование Лапласа с разнообразной точностью, что позволяет найти баланс между точностью и быстродействием.
3. **Практическое значение:** преобразование Лапласа имеет широкое пространство, а простой и универсальный инструмент для его численного обращения позволяет специалистам из разных областей науки и техники решать требуемые задачи.
4. **Перспективы:** дальнейшее развитие может быть направлено на оптимизацию работы программы в силу повторяемой природы вычислений. Также возможна реализация на более мощном оборудовании, что позволит увеличить точность за счет грубого увеличения скорости обработки данных.

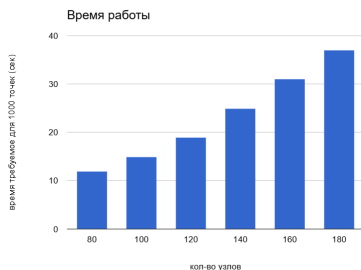


Рис. 4: Время вычисления значений 1000 точек при разном количестве узлов КФНСТ в секундах.

Итогом работы стало создание ПО и подтверждение применимости теоретических данных, описанных в [10], для решения практических задач.

Заключение

В результате данной работы был реализован алгоритм построения КФНСТ для численного обращения преобразования Лапласа. Данный метод является достаточно универсальным и удобным способом обращения, что позволяет использовать его при решении задач, требующих высокой точности.

Созданное в процессе работы ПО может быть использовано в задачах обращения преобразования Лапласа, возникающих у специалистов различных сфер науки и техники.

В дальнейшем созданная программа может быть улучшена. Для повышения точности вычислений и общего быстродействия системы могут быть использованы распределённые вычисления и более оптимальные алгоритмы вычислений.

Список литературы

- [1] Erwin Kreyszig, «Advanced Engineering Mathematics», 10th ed. (New York: John Wiley & Sons, 2020). С. 203-253
- [2] Лебедева, А. В. «Определение точек разрыва и величины скачка оригинала по его изображению по Лапласу» / А. В. Лебедева, В. М. Рябов // Вест-

- ник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2024. – Т. 11, № 2. – С. 316-323.
- [3] Арнольд В. И. «Обыкновенные дифференциальные уравнения» / В. И. Арнольд. — М.: МЦНМО, 2014. — 342 с.
- [4] Dwight H. B. «Tables of Laplace Transforms.» — New York: Dover Publications, 1974. — 360 p
- [5] Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа: справочная книга. — М. : Мир, 1968. — 224 с.
- [6] Рябов В. М. «О точности некоторых методов обращения преобразования Лапласа» // Методы вычислений. Вып. 14. Л. 1985. С. 59–71.
- [7] Лебедева А.В., Рябов В.М. «Характеристики сходимости и устойчивости некоторых методов обращения преобразования Лапласа» // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11, № 1. С. 115–130
- [8] Суетин П.К. «Классические ортогональные многочлены.» М., 1979.
- [9] Luke Y. «The special functions and their approximations.» V. 2. New York, 1969.
- [10] Bruin M.G., Saff E.B., Varga R.S. «On the zeros of generalised Bessel polynomials.» I, II // Indagat. math. 1981.
- [11] Piyter, D. (2025). Construction of quadrature formulas of the highest degree of accuracy for the inversion of the Laplace transform. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15276516>