

Применение сплайнов к численному решению нелинейных интегральных уравнений Вольтерра

Бурова И.Г., СПбГУ, Санкт-Петербург i.g.burova@spbu.ru,
 Овинников Н.Д., СПбГУ, Санкт-Петербург st091083@student.spbu.ru,
 Алцыбеев Г.О., СПбГУ, Санкт-Петербург gleb.alcybeev@spbu.ru

Аннотация

В работе рассматривается применение сплайновых аппроксимаций второго и пятого порядка для численного моделирования решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра. Приведены численные эксперименты.

Введение

Математические модели традиционно описываются с помощью дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений. Известно множество различных численных методов для решения таких задач [1], [2], [3]. Для описания поведения сред разрабатываются математические модели, учитывающие как упругие, так и вязкие компоненты деформации. Такие модели позволяют предсказать отклик материала на различные внешние воздействия. Как было показано в работе [4], свойство вязкоупругости подразумевает, что, начиная с ненулевого момента времени, тело имеет ярко выраженные упругие свойства на коротких интервалах времени и ярко выраженные вязкие свойства на больших интервалах времени. На длительных интервалах времени T вязкоупругие среды можно считать изменяющимися медленно. Основной закон нелинейной деформации часто записывается либо в дифференциальной форме через реологические константы материала, либо в интегральной форме. При изучении среды рассматривают поведение ее математической модели при разных входных данных.

Интегральное уравнение Вольтерра

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$E\varepsilon(x) = \sigma(x) + \int_0^x K(x, s)f(\sigma(s))ds, \quad x \in [0, T], \quad (1)$$

здесь ε — деформация, E — мгновенный модуль упругости, $T > 0$, а K — ядро Ржаницына, см. [5], имеет следующий вид

$$K(x, s) = Ae^{-\beta(x-s)}(x-s)^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad A > 0, \quad \beta > 0. \quad (2)$$

В статье [4] предложена численная обработка реологических моделей в контексте нелинейной наследуемой теории ползучести, представлен численный метод для нелинейных слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра с ядром Ржаницына.

Рассмотрим пример модельного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода из работы [4]

$$\begin{aligned} \sigma(x) + \int_0^x \frac{a\sigma(s) + b\sigma^2(s)}{\sqrt{x-s}} ds = \\ = 2(a + b^2)\sqrt{x} - \frac{(a + 2b)\pi x}{2} + \frac{4b}{3}x^{3/2}, \quad x \in [0, 1], \end{aligned} \quad (3)$$

точным решением которого является функция $\sigma(x) = 1 - \sqrt{x}$. Полагаем $a = 0.015$, $b = 0.399$.

Воспользуемся сплайнами второго порядка аппроксимации [6] для моделирования решения уравнения (3). Решение будем строить на сетке равноотстоящих узлов $\{x_j\}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $n \geq 2$, с шагом h . На промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ аппроксимируем $\sigma(x)$ выражением

$$\tilde{U}(x) = \sigma(x_j)\omega_j(x) + \sigma(x_{j+1})\omega_{j+1}(x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (4)$$

где базисные сплайны $\omega_j(x)$ и $\omega_{j+1}(x)$ могут быть полиномиальными или неполиномиальными базисными функциями.

Базисные функции можно получить следующим образом. Введем непрерывные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, образующие систему Чебышева. Тогда базисные сплайны $\omega_j(x)$, $\omega_{j+1}(x)$ на промежутке $[x_j, x_{j+1}]$ находим из условий

$$\tilde{U}(x) = \sigma(x), \quad \sigma(x) = \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x).$$

В случае $\varphi_0(x) = 1$ и $\varphi_1(x) = x$ получаем полиномиальные базисные сплайны

$$\omega_j(x) = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad (5)$$

$$\omega_{j+1}(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \quad (6)$$

Выражение (4) используем в интегральной части уравнения (3). В итоге, применяя теорию и практику построения квадратурных формул гауссова типа, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $\sigma(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Решая систему, получаем каркас приближенного решения.

Приведем погрешность решения в случае применения кусочно-линейных сплайнов второго порядка аппроксимации при количестве узлов сетки $n = 50$. На рисунке 1 представлен график погрешностей решения в узлах сетки.

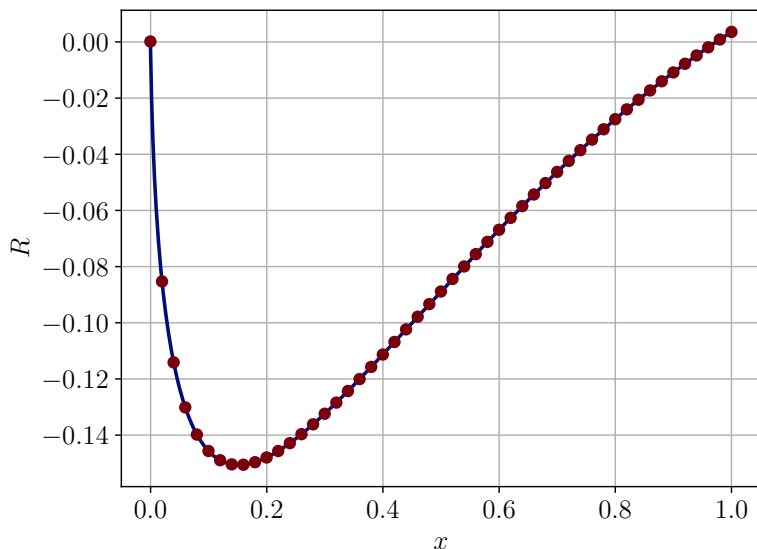


Рис. 1: График погрешностей приближенного решения при использовании кусочно-линейных сплайнов второго порядка аппроксимации, $n = 50$

Аналогично можно построить полиномиальную аппроксимацию пятого порядка. В начале, середине и конце промежутка $[0, 1]$ используем разные аппроксимации пятого порядка. В начале промежутка $[0, 1]$ используем

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & \sigma(x_j)\omega_j(x) + \sigma(x_{j+1})\omega_{j+1}(x) + \\ & + \sigma(x_{j+2})\omega_{j+2}(x) + \sigma(x_{j+3})\omega_{j+3}(x) + \sigma(x_{j+4})\omega_{j+4}(x), \end{aligned} \quad (7)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2.$$

В середине промежутка $[0, 1]$ используем

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & \sigma(x_{j-2})\omega_{j-2}(x) + \sigma(x_{j-1})\omega_{j-1}(x) + \\ & + \sigma(x_j)\omega_j(x) + \sigma(x_{j+1})\omega_{j+1}(x) + \sigma(x_{j+2})\omega_{j+2}(x), \end{aligned} \quad (8)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 3, \dots, n-2.$$

В конце промежутка $[0, 1]$ используем

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & \sigma(x_{j-3})\omega_{j-3}(x) + \sigma(x_{j-2})\omega_{j-2}(x) + \\ & \sigma(x_{j-1})\omega_{j-1}(x) + \sigma(x_j)\omega_j(x) + \sigma(x_{j+1})\omega_{j+1}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = n-3, n-2, n-1.$$

Таким образом, получаем базисные сплайны подходящие для аппроксимации в начале интервала интерполяции (правые базисные сплайны), в середине интервала интерполяции (серединные базисные сплайны) и в конце интервала интерполяции (левые базисные сплайны).

Воспользуемся сплайнами пятого порядка аппроксимации для моделирования решения уравнения (3). Решение будем строить на сетке равноотстоящих узлов $\{x_j\}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $n \geq 6$, с шагом h . На рисунке 2 показаны графики точного и приближенного решений при $n = 7$. Красный график — точное решение, синий график — приближенное решение. На рисунке 3 представлен график погрешностей решения интегрального уравнения при $n = 7$. Таким образом, при большем количестве узлов сетки кусочно-линейные сплайны второго порядка аппроксимации все же дают большую погрешность, чем сплайны пятого порядка аппроксимации.

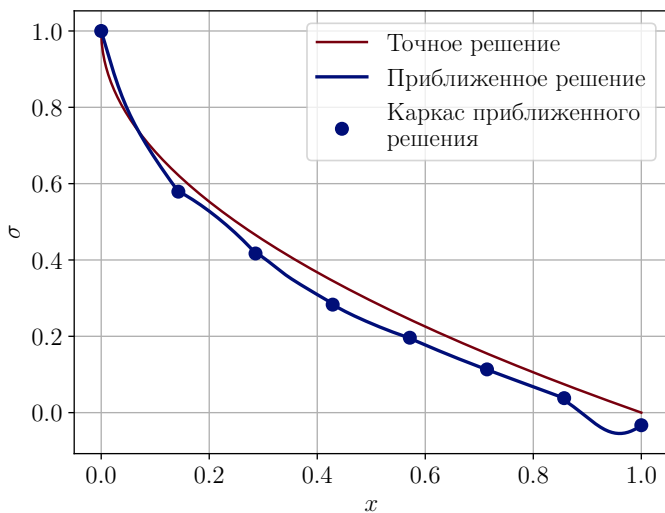


Рис. 2: График точного решения (красный) и приближенного решения при использовании сплайнов второго порядка аппроксимации (синий), $n = 7$

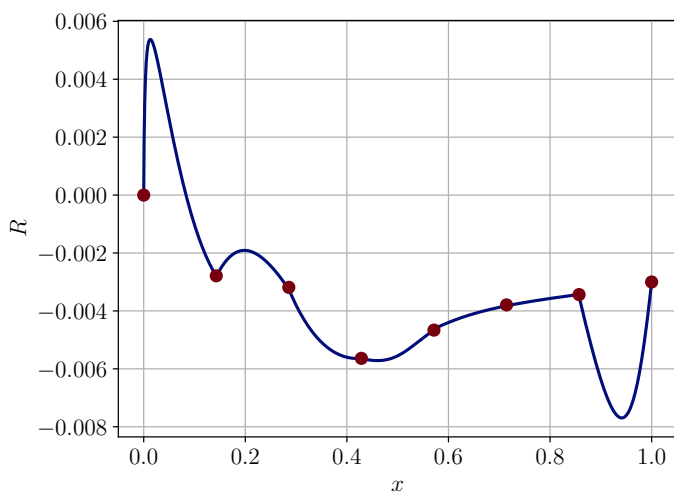


Рис. 3: График погрешностей приближенного решения при использовании сплайнов пятого порядка аппроксимации, $n = 7$

Заключение

Новизна данной работы заключается в том, что для численного решения нелинейного интегрального уравнения используются локальные сплайновые аппроксимации. Можно показать, что методы, основанные на использовании сплайновых аппроксимаций второго и пятого порядка, как правило, дают меньшую погрешность, чем использование других методов решения интегральных уравнений.

Список литературы

- [1] Михлин С. Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.: ОГИЗ, 1947. 304 с.
- [2] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Физматгиз, 1970. 512 с.
- [3] Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В. Интегральные уравнения в теории упругости. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 1994. 271 с.

- [4] Тында А. Н., Романов А. Е. Численное решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с дробно-экспоненциальными ядрами реологических моделей вязкоупругой среды // ИЗВЕСТИЯ Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2012. — Т. 2. № 2. — С. 7–12.
- [5] Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: Гостехиздат, 1949.
- [6] Михлин С. Г. Вариационно-сеточная аппроксимация // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. 1974. Т. 48. С. 32–188.