

Управление состояниями нелинейных динамических систем с использованием резервуарных вычислений

Васильев М.А., СПбГУ, Санкт-Петербург mvasilev801@gmail.com,

Мокаев Т.Н., СПбГУ, Санкт-Петербург t.mokaev@spbu.ru

Аннотация

В данной работе исследуется метод управления нелинейными динамическими системами с использованием резервуарных вычислений. Этот подход позволяет переводить систему в заданное целевое состояние без необходимости точного знания её уравнений движения. Основная цель — воспроизвести результаты исследования Haluszczyński и Răth, а также изучить возможности улучшения метода. Эксперименты проводились на системах Лоренца и Рёсслера, демонстрируя эффективность предложенного подхода. В работе обсуждаются преимущества и недостатки метода, а также предлагаются направления его совершенствования.

Введение

Управление нелинейными динамическими системами представляет собой важную задачу в различных областях науки и техники, включая физику, биологию и инженерию. Такие системы, часто проявляющие хаотическое поведение, сложно поддаются управлению традиционными методами, которые требуют точных математических моделей или больших объёмов данных. Развитие методов машинного обучения, в частности резервуарных вычислений, открывает новые перспективы для управления такими системами. RC позволяет строить управляющие стратегии на основе данных о поведении системы, не требуя её явного математического описания.

Цель данной работы — изучить метод управления, предложенный Haluszczyński и Răth, подтвердить его эффективность на примерах систем Лоренца и Рёсслера, а также исследовать пути улучшения. Этот подход основан на использовании эхо-сетей (Echo State Networks, ESN), которые являются разновидностью RC, для предсказания и коррекции динамики системы.

Теоретические основы и методология

Динамические системы

Динамическая система может быть представлена как пара $(\varphi^t_{t \in J}, (M, \rho))$, где M — метрическое пространство, J — множество значений времени, а φ^t — семейство отображений, удовлетворяющих условиям тождественности, композиции и непрерывности. Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида $\dot{x} = f(x)$, управление достигается введением сигнала $u(t)$, изменяющего динамику: $\dot{x} = f(x) + Bu(t)$. Цель управления — перевести систему из текущего состояния в заданное целевое состояние.

Резервуарные вычисления

Резервуарные вычисления — это класс рекуррентных нейронных сетей, состоящих из фиксированного резервуара и обучаемого выходного слоя. В данной работе используется модель эхо-сети (ESN), которая обладает свойством эхо-состояния, обеспечивающим зависимость текущего состояния сети от истории входных данных. Резервуар случайным образом инициализируется с заданным спектральным радиусом (обычно в диапазоне 0.8–1.2), а обучение проводится только для выходного слоя, что снижает вычислительную сложность.

Методы управления

Метод, предложенный Haluszczynski и R  th [1], включает следующие этапы:

1. Симуляция системы в целевом состоянии X .
2. Обучение RC на данных состояния X .
3. Изменение параметров системы для перехода в состояние Y .
4. Использование RC для предсказания поведения в состоянии X и вычисления управляющей силы $F(t) = K(u(t) - v(t))$, где $u(t)$ — текущее состояние, $v(t)$ — предсказанное состояние.
5. Применение $F(t)$ для возвращения системы в целевое состояние X .

Этот подход проверялся на системах Лоренца и Рёсслера, где изменение параметров вызывало переход системы в новое состояние, а РС успешно возвращала её в исходное. В качестве метрики использовались наибольший показатель Ляпунова и корреляционная размерность.

Наибольший показатель Ляпунова (Largest Lyapunov Exponent, LLE) — это величина, которая измеряет, насколько быстро расходятся близкие траектории системы в фазовом пространстве. Она характеризует чувствительность системы к начальным условиям:

Корреляционная размерность (Correlation Dimension, CD) — это мера сложности аттрактора системы, которая связана с её фрактальной размерностью. Она показывает, сколько степеней свободы фактически задействовано в динамике системы.

Синяя траектория - целевая, красная - система без управления, зеленая - система с управлением.

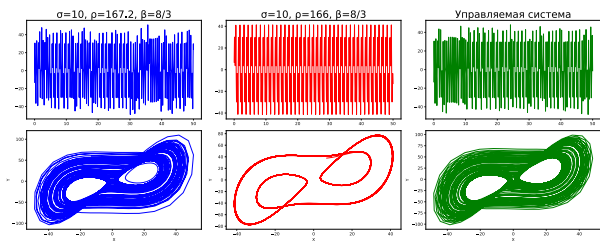


Рис. 1: Управление системой Лоренца с помощью ESN

	Исходная	Измененная	Управляемая
λ (LLE)	2.7878	0.0668	2.7440
μ (CD)	1.8131	1.1955	1.7339

	Исходная	Измененная	Управляемая
λ (LLE)	0.1405	0.2035	0.1382
μ (CD)	1.8150	1.9427	1.7516

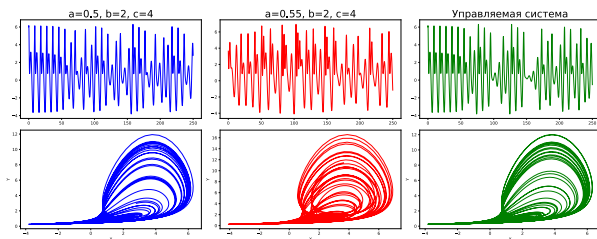


Рис. 2: Управление системой Рёсслера с помощью ESN

Сравнение с другими моделями

Многослойный перцептрон (MLP)

Многослойный перцептрон (MLP) — это базовая архитектура искусственных нейронных сетей, состоящая из входного слоя, одного или нескольких скрытых слоев и выходного слоя. Обучение проводится методом обратного распространения ошибки. В работе MLP применялся со скользящим окном для обработки временных рядов, что позволяло учитывать последовательные данные. Однако из-за отсутствия встроенной памяти эта модель показала ограниченную эффективность в задачах управления динамическими системами по сравнению с более продвинутыми архитектурами.

LSTM (Long Short-Term Memory)

LSTM — это разновидность рекуррентных нейронных сетей, специально разработанная для работы с последовательными данными. Благодаря ячейкам памяти и вентильным механизмам (входной, выходной и забывания), LSTM способна сохранять информацию на длительные временные интервалы. В экспериментах эта модель улучшала точность предсказаний динамики систем Лоренца и Рёсслера по сравнению с MLP, что делает её подходящей для задач управления динамическими системами с долговременными зависимостями.

ReservoirLSTM

ReservoirLSTM представляет собой гибридную архитектуру, сочетающую принципы резервуарных вычислений и LSTM. В этой модели внутренние веса вентилей заменены на резервуары, а обучение проводится только

для выходных весов. Такое сочетание позволяет использовать вычислительные возможности резервуарных вычислений для обработки краткосрочных временных зависимостей и способности LSTM для моделирования долгосрочных закономерностей. В работе эта модель показала улучшенные результаты в управлении динамическими системами.

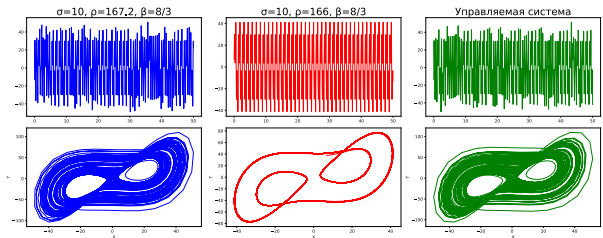


Рис. 3: Управление системой Лоренца с помощью ReservoirLSTM

	Исходная	Измененная	Управляемая
λ (LLE)	2.7878	0.0668	2.8053
μ (CD)	1.8131	1.1955	1.8076

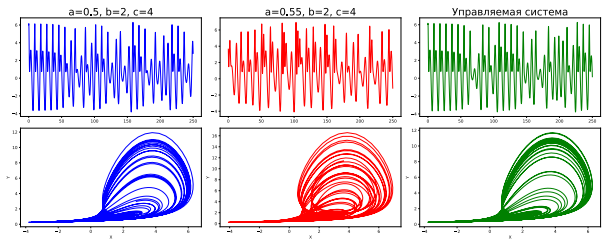


Рис. 4: Управление системой Рёссlera с помощью ReservoirLSTM

	Исходная	Измененная	Управляемая
λ (LLE)	0.1405	0.2035	0.1484
μ (CD)	1.8150	1.9427	1.8301

ESN-LSTM

ESN-LSTM — это ещё одна гибридная модель, интегрирующая резервуарный слой и слой LSTM. Архитектура состоит из резервуарного слоя, слоя LSTM и выходного слоя. Обновлённое состояние резервуара обрабатывается LSTM-блоком, состояние резервуара и LSTM конкатенируются и через линейный слой получаем предсказание модели.

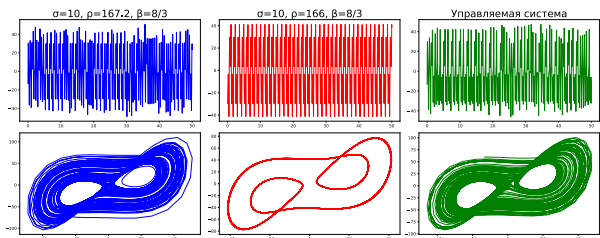


Рис. 5: Управление системой Лоренца с помощью ESN-LSTM

	Исходная	Измененная	Управляемая
λ (LLE)	2.7878	0.0668	2.8053
μ (CD)	1.8131	1.1955	1.8076

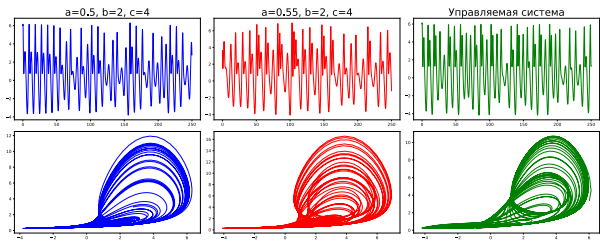


Рис. 6: Управление системой Рёсслера с помощью ESN-LSTM

	Исходная	Измененная	Управляемая
λ (LLE)	0.1405	0.2035	0.1784
μ (CD)	1.8150	1.9427	1.7825

Работа алгоритма

Результаты экспериментов показали, что схема управления на основе ESN успешно возвращает систему к целевому состоянию. Сравнение показывает, что простые MLP и даже одиночные LSTM не справляются в полной мере с задачей управления сложной динамикой без обширной настройки. Резервуарные подходы обладают универсальностью и демонстрируют высокую эффективность в прогнозе и управлении динамическими системами. Именно фиксированный резервуар и обучение только выходного слоя делают такие модели быстрыми и устойчивыми к переобучению, обеспечивая при этом превосходную аппроксимацию сложных отображений фазового пространства.

Заключение

Метод управления на основе ESN позволил восстановить численные атрибуты хаоса (Ляпуновский показатель и корреляционную размерность) практически до исходных значений. Гибридные нейросетевые модели (ReservoirLSTM, ESN-LSTM) оказались более эффективными, чем стандартные MLP или LSTM (с одиночной памятью). Это указывает на перспективность использования резервуарных архитектур в задачах управления хаосом и динамикой. Перспективы дальнейших исследований включают оптимизацию архитектуры резервуарных вычислений, внедрение моделей NG-RC и разработку гибридных подходов с глубокими нейронными сетями, что может повысить точность и расширить область применения метода в реальных задачах управления сложными системами

Список литературы

- [1] Haluszczyński, A., Räth, C. Controlling nonlinear dynamical systems into arbitrary states using machine learning. *Sci Rep* 11, 12991 (2021).
- [2] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J. A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.* 64, 1196 (1990).
- [3] Pyragas, K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A* 170, 421-428 (1992).
- [4] Grigoryeva, L., Ortega, J.-P. Echo state networks are universal (2018).