Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет

Математическое обеспечение и АИС
Технология программирования

Гиниятуллин Эльдар Ирекович

Система для моделирования применений итеративных модификаций алгоритма знаковозмущенных сумм

Бакалаврская работа

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор Граничин О. Н.

Рецензент:
к.ф.-м.н., ст. науч. сотрудник ИПМаш РАН Шалымов Д. С.

Санкт-Петербург
2019

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

Software and Administration of Information Systems
Technology of Programming

Eldar Giniyatullin

Simulating System for Applications of SPS Method Modifications

Graduation Thesis

Scientific supervisor:
Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor O. N. Granichin

Reviewer:
PhD, Senior researcher IPME RAS D. S. Shalymov

Saint Petersburg
2019

Оглавление

Введение

Одной из важных задач, решаемых в теории динамических систем, в машинном обучении и смежных областях являются определение и оценка неизвестного параметра системы. Зачастую эти системы определены как системы с помехами. На текущий момент имеется достаточное количество методов, решающих эту задачу. Однако нередко те из них, которые дают хорошие результаты для большого количества данных, оказываются малоэффективными в условиях работы с малым количеством наблюдений. Такие условия могут возникнуть, например, когда не имеется достаточно временных или вычислительных ресурсов для получения большего объёма данных. Также такая ситуация встречается при работе с моделями, в которых неизвестный параметр достаточно часто изменяется по какому-либо закону или правилу, возможно неизвестному заранее.

В настоящий момент развивается целый класс рандомизированных методов, направленных на решение подобного рода задач. Одним из представителей этого класса, разработанным для эффективного оценивания скрытых параметров системы в условиях ограниченного количества входных данных, является относительно новый метод знаковозмущенных сумм (Sign-Perturbed Sums, SPS), впервые описанный в [2].

В первых публикациях ([2], [3]) метод знаковозмущенных сумм был описан лишь для линейных динамических систем, однако на момент написания работы уже имеются описания метода для нелинейных процессов [7], для систем с асимметричными помехами [1], исследованы его асимптотические свойства [5], что может указывать на развитие метода.

Отдельный интерес вызывает возможность нахождения рекуррентных соотношений для итеративной работы алгоритмов, основанных на методе знаковозмущенных сумм, а именно: можно ли, имея данные результатов работы алгоритма для набора из предыдущих n наблюдений и получая новые измерения, вычислять доверительные области на основе имеющихся данных, не применяя заново алгоритм к новому набору.

На текущий момент никаких описаний подобных итеративных алгоритмов сделано не было. Также необходимо будет иметь возможность моделирования таких алгоритмов. Имеющиеся пакеты (Statistica, Matlab, Wolfram Mathematica и другие) не имеют функционала, непосредственно реализующего метод знаковозмущенных сумм.

1. Цель работы

Целью работы является вывод возможных рекуррентных соотношений, позволяющих при обработке нового наблюдения решить задачу оценки доверительных областей, воспользовавшись данными, полученными алгоритмом на предыдущем наборе наблюдений, вместо того, чтобы производить полную работу алгоритма на новых данных. На полученных соотношениях планируется построить новые итеративные алгоритмы. При этом также необходимо создать инструмент, с помощью которого можно проверить сохранение работоспособности при применении этих алгоритмов и тем самым эффективность применения выведенных соотношений.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- Вывести предполагаемые соотношения, связывающие данные, получаемые при работе алгоритма на последовательных входных данных, и проверить их эффективность.

- Разработать систему для тестирования алгоритмов, основанных на выведенных соотношенях.

- Апробировать систему для обработки массивов экспериментальных данных.

2. Математическая модель

Рассмотрим следующую модель системы:

$$y_t = b_1^* \, U_{t-1} + b_2^* \, U_{t-2} + \cdots + b_d^* \, U_{t-d} + v_t,\ t \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

в которой $n \in \mathbb{N}$ – количество проведенных наблюдений, $U_t \in \mathbb{R}$ – известные параметры системы, $v_t \in \mathbb{R}$ – помехи, $b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, d\}$ – неизвестные параметры системы, $y_t, \in \mathbb{R}$ – т.н. наблюдения. Сразу введем обозначения: $\varphi_t := [U_{t-1}, ..., U_{t-d}]^T$ и $\theta^* := [b_1^*, ..., b_d^*]^T$. Тогда систему 1 можно переписать в виде

$$y_t = \varphi_t^T \theta + v_t,\ t \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Механизмы обработки входных данных алгоритмами знаковозмущенных сумм можно условно поделить на 2 типа:

механизм обработки первого типа: пересчет доверительного множества с появлением нового наблюдения происходит без исключения какого-либо из предыдущих;

механизм обработки второго типа: с появлением нового наблюдения происходит удаление данных о предыдущем наблюдении.

За основу исследования взят алгоритм, описанный в [3], так как несмотря на то, что на данный момент описаны более сложные модификации, работающие, соответственно, с более широким классом задач, все эти модификации в достаточной степени основаны на этом алгоритме. Алгоритм решает следующую задачу:

Задача 1. *Имеется динамическая система, описываемая соотношением (1). При известных значениях $\{\varphi_t\}_{t=1}^n$ $\{y_t\}_{t=1}^n$ для указанного числа $p \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ определить p-доверительные области нахождения в них неизвестного параметра θ^*.*

2.1. Исследуемый алгоритм

Терминология, используемая в тексте работы:

- R_n – *регуляризующая матрица*;

- $\beta_{i,t}$ – *знаки*;
- $H_i(\theta), S_i(\theta)$ – *знаковозмущенные суммы.*

Описание алгоритма 1[1] :

Шаг 1) Для указанного значения вероятности $p \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ выбрать натуральные $m > q > 0$, т.ч. $p = 1 - q/m$.

Шаг 2) Вычислить

$$R_n := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \varphi_t \varphi_t^T$$

и вычислить $R_n^{1/2}$ (т.е. такую матрицу, что $R_n^{1/2T} R_n^{1/2} = R_n$).

Шаг 3) Сгенерировать $n(m-1)$ одинаково распределенных независимых случайных знаков $\{\beta_{i,t}\}$, $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $t \in \{1, \dots, n\}$, принимающих значение из $\{-1; 1\}$, для которых

$$\mathbb{P}(\beta_{i,t} = 1) = \mathbb{P}(\beta_{i,t} = -1) = \frac{1}{2}.$$

Шаг 4) Определить область

$$\hat{\Theta}_n := \{\theta \in \mathbb{R}^d : SPS - INDICATOR(\theta) = 1\}.$$

SPS-INDICATOR(θ):

Шаг 1) Для $t \in \{1, ..., n\}$ вычислить значение невязки функции в точке, помноженной на саму точку: $\delta_t(\theta) := \varphi_t(y_t - \varphi_t^T \theta)$;

Шаг 2) Вычислить знаковозмущенные суммы

$$H_0(\theta) := \sum_{t=1}^{n} \delta_t(\theta),\ H_i(\theta) := \sum_{t=1}^{n} \beta_{i,t} \delta_t(\theta),\ i \in \{1, ..., m\};$$

Шаг 3) Вычислить знаковозмущенные суммы

$$S_0(\theta) := R_n^{-1/2} \frac{1}{n} H_i(\theta),\ i \in \{0, ..., m\};$$

[1]приводится согласно работе [3], в оригинальном описании отсутствует непосредственное вычисление $H_i(\theta)$, но оно неявно является промежуточным, здесь же введено для наглядности

Шаг 4) $Rank(\theta)$ определить как порядковый номер значения $\|S_0(\theta)\|^2$ в упорядоченном по возрастанию наборе $\{\|S_i(\theta)\|^2\}_{i=0}^m$

Шаг 5) Если $Rank(\theta) \leq m - q$, то вернуть 1, иначе 0

Полученная область будет являться p-доверительной областью для параметра θ^* ([3]).

В этой работе используется норма $\|\cdot\|_2$, но, согласно [3], в качестве нормы можно брать любую.

2.2. Оценка сложности работы алгоритма

Далее дадим оценку временной сложности последовательного выполнения алгоритма 1.

Оценка временной сложности метода SPS-INDICATOR(θ):

Шаг 1) сложность вычисления каждого $\delta_t(\theta)$, $t \in \{1, ..., n\}$, равна $O(d)$, итоговая сложность $O(nd)$;

Шаг 2) вычисление каждой знаковозмущенной суммы $H_i(\theta)$, $i \in \{0, ..., m\}$: $O(nd)$, вычисление всех: $O(mnd)$;

Шаг 3) вычисление каждой знаковозмущенной суммы $S_i(\theta)$, $i \in \{0, ..., m\}$: $O(d^2)$, вычисление всех: $O(md^2)$

Шаг 4) вычисление норм знаковозмущенных сумм: $O(md)$, вычисление $Rank(\theta)$ имеет сложность $O(m)$ [2].

Общая временная оценка сложности метода составляет $O(md(d+n))$ [3].

Оценка временной сложности алгоритма 1:

Шаг 2) сложность вычисления регуляризующей матрицы R_n равна $O(nd^2)$, её факторизации (если требуется): $O(d^3)$ классическими метода-

[2] В случае, если не требуется упорядоичивание набора $\{\|S_i(\theta)\|^2\}_{i=0}^m$; иначе $O(m\,log(m))$.

[3] $O(m(d^2 + nd + log(m)))$ при проведении упорядочивания на шаге 4 соответственно

ми[4]. Также требуется вычислить R_n^{-1}: $O(d^3)$, например методом Гаусса–Жордана;

Шаг 3) генерация $n(m-1)$ знаков: $O(mn)$;

Отдельно стоит разобрать шаг 4 основного алгоритма. Алгоритм 1 не указывает какой-либо общий метод, реализующий этот шаг. Способы реализации шага 4 описаны в [6], [7]. В [7] был предложен алгоритм, работающий за полиномиальное время. При разработке системы был использован алгоритм, подходящий в рамках этой работы и основанный на построении сетки на гиперсферических координатах с центром в оценке МНК $\hat{\theta}_n$, так как, согласно [7], доверительная область является *звездной*[5] с центром в этой оценке. Стоит учесть, что в любой из этих реализаций временная сложность проверки принадлежности точки доверительной области эквивалентна сложности метода SPS-INDICATOR. В разделе 2.1 при описании итеративного алгоритма этот шаг будет использоваться лишь единожды.

Таким образом, без учета шага 4 алгоритма 1, *общая оценка его временной сложности равна* $O(mn + nd^2 + d^3)$.

2.3. Регуляризующая матрица R_n

2.3.1. Свойства регуляризующей матрицы

Для последующего вывода соотношений нужно обозначить некоторые свойства регуляризующей матрицы:

Свойство 1. *R_n симметрична.* По построению: R_n является суммой симметричных матриц.

Свойство 2. *R_n^{-1} симметрична, если существует.* Как обратная к симметричной.

Свойство 3. *R_n неотрицательно определена.* В самом деле, для каждой матрицы вида $\varphi_t \varphi_t^T$ верно: $\forall y \in \mathbb{R}^d \quad y^T \varphi_t \varphi_t^T y = (y^T \varphi_t)^2 \geq 0$, в свою очередь R_n является суммой слагаемых такого вида.

[4] Разложение Холецкого; в частном случае $(n = d)$ $R_n^{-1/2}$ может быть легко определена как $(1/\sqrt{n})\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^T$.

[5] X – звездная область с центром в точке c, если $\forall x \in X : \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)c \in X$[7]

Также стоит заметить, что при использовании $\|\cdot\|_2$ выполняется

$$\|S_i(\theta)\|_2^2 = \left(\frac{1}{n}R_n^{-\frac{1}{2}}H_i(\theta)\right)^T\frac{1}{n}R_n^{-\frac{1}{2}}H_i(\theta) = \frac{1}{n^2}H_i(\theta)^T R_n^{-1}H_i(\theta). \qquad (3)$$

Далее будут рассмотрены случаи, описанные в разделе 1.

2.3.2. Рекуррентная формула в механизме обработки первого типа

В этом случае регуляризующая матрица пересчитывается по формуле $\widetilde{R}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{t=1}^{n+1}\varphi_t\varphi_t^T$. Тогда из определения следует, что матрицы R_n и $\widetilde{R}_{n+1}$ связываются следующим соотношением:

$$\widetilde{R}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\big(R_n + \varphi_{n+1}\varphi_{n+1}^T\big).$$

Из (3) следует, что в вычислении $R_n^{-1/2}$ нет необходимости, достаточно вычислять R_n^{-1}. Для ее рекуррентного вычисления можно воспользоваться формулой Шермана-Моррисона [4], а именно

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u},$$

в силу которой и свойства 2

$$\widetilde{R}_{n+1}^{-1} = \left(\frac{n}{n+1}\Big(R_n + \varphi_{n+1}\varphi_{n+1}^T\Big)\right)^{-1} = \frac{n+1}{n}\left(R_n^{-1} - \frac{(R_n^{-1}\varphi_{n+1})^2}{1 + \varphi_{n+1}^T R_n^{-1}\varphi_{n+1}}\right).$$

Необходимое условие $(1+\varphi_{n+1}^T R_n^{-1}\varphi_{n+1} \neq 0)$ выполняется всегда согласно свойству 3.

2.3.3. Рекуррентная формула в механизме обработки второго типа

Во втором случае матрица пересчитывается как $\widetilde{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n+1}\varphi_t\varphi_t^T$. Рекуррентная формула, связывающая их, будет выглядеть как

$$\widetilde{R}_n = \frac{1}{n}\Big(nR_n + \varphi_{n+1}\varphi_{n+1}^T - \varphi_1\varphi_1^T\Big).$$

Для вывода рекуррентного соотношения на $\widetilde{R}_n^{-1}$ нужно заметить, что $-\varphi_1\varphi_1^T = (i\varphi_1)(i\varphi_1)^T$, где i – мнимая единица, и дважды применить формулу Шермана-Моррисона. Однако теперь накладывается дополнительное условие, выполнение которого, вообще говоря, свойствами регуляризующей матрицы не гаранитруется.

2.3.4. Результаты, получаемые при использовании рекуррентного пересчета регуляризующих матриц

В обоих случаях для регуляризующих матриц выведены строгие формулы, позволяющие при выполнении определенных условии проводить непосредственное вычисление алгоритма лишь в первый раз, производя затем вычисления рекуррентно. Стоит обратить внимание, что их рекуррентное вычисление не вносит в работу алгоритма никаких погрешностей, кроме возможных погрешностей машинных вычислений. Кроме того, обращение матрицы на последующих итерациях было заменено на арифметические операции над матрицами, причем все операции умножения являются умножениями квадратных матриц на векторы. Таким образом удается изменить выведенную в разделе 2.2 оценку временной сложности с $O(mn + nd^2 + d^3)$ до $O(nm + nd^2)$.

2.4. Знаковозмущенные суммы $H_i(\theta)$ и $S_i(\theta)$ [6]

2.4.1. Важное замечание

Фактически (как указано в [3]) в описанном в разделе 2.1 алгоритме мы можем сравнивать $\|H_i(\theta)\|^2$ вместо $\|S_i(\theta)\|^2$, поэтому в этом разделе будут приведены выкладки для обоих типов знаковозмущенных сумм. Необходимость же в домножении на $R_n^{-1/2}$ и $1/n$ заключается в избежании слишком больших значений в вычислениях.

---

[6] **В этом разделе по умолчанию считается, что регуляризующие матрицы и обратные к ним можно вычислять, пользуясь формулами из преыдущего пункта.**

2.4.2. Вводимые предположения

Бóльшие трудности возникают при работе со знаковозмущенными суммами. Не используя никаких предположений, можно вывести рекуррентные соотношения на $H_i(\theta)$ и $S_i(\theta)$ только при $i = 0$. В первом случае

$$\widetilde{H}_0(\theta) = H_0(\theta) + \delta_{n+1}(\theta),\ \widetilde{S}_0(\theta) = \frac{1}{n+1}\,\widetilde{R}_{n+1}^{-1/2}(H_0(\theta) + \delta_{n+1}(\theta));$$

во втором случае

$$\widetilde{H}_0(\theta) = H_0(\theta) + \delta_{n+1}(\theta) - \delta_1(\theta),\ \widetilde{S}_0(\theta) = \frac{1}{n}\,\widetilde{R}_n^{-1/2}(H_0(\theta) + \delta_{n+1}(\theta) - \delta_1(\theta)).$$

Трудность заключается в том, что формально при последующем запуске алгоритма для вычисления остальных знаковозмущенных сумм генерируются уже новые знаки. В связи с чем возникает следующая ***гипотеза:*** *при достаточно больших* m *знаковозмущенные суммы имеет смысл не пересчитывать.* Потенциальное преимущество этого подхода заключается в отсутствии необходимости генерации всех знаков, т.е. остается открытым лишь вопрос генерации $\{\beta_{i,n+1}\}_{i=1}^m$.

Соображения, приводящие к появлению этой гипотезы, таковы: чем больше $\|\theta^* - \theta\|$, тем больше вероятность выполнения соотношения

$$\left\|\sum_{t=1}^n \varphi_t\varphi_t^T(\theta^* - \theta) + \sum_{t=1}^n \varphi_t v_t\right\|^2 > \left\|\sum_{t=1}^n \pm\varphi_t\varphi_t^T(\theta^* - \theta) + \sum_{t=1}^n \pm\varphi_t v_t\right\|^2.$$

Соответственно, чтобы это неравенство выполнялось, нужно посчитать достаточное количество знаковозмущенных сумм (параметр m). Если сделать это при первом запуске алгоритма, то в результате выполнение этого неравенства будет уже выявлено. Но, если выполнение неравенства уже выявлено, его можно не пересчитывать при следующих запусках алгоритма 1. Конечно, соотношение является относительным и вполне возможны невязки с обработкой каждого нового наблюдения, но при сделанных допущениях они предполагаются в достаточной степени медленно возрастающими, что и требовалось проверить на конкретных примерах при помощи разработанной системы тестирования.

2.4.3. Следствия из гипотезы

Выполнение гипотезы автоматически влечет за собой следующие допущения: рекуррентно пересчитываются остальные знаковозмущенные суммы:

для *механизмов первого типа*:

$$\widetilde{H}_i(\theta) = H_i(\theta) + \beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta), \tag{4}$$

$$\widetilde{S}_i(\theta) = \frac{1}{n+1}\widetilde{R}_{n+1}^{-1/2}\Big(H_i(\theta) + \beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta)\Big); \tag{5}$$

нормы выражаются следующим образом:

$$\|\widetilde{H}_i(\theta)\|_2^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\Big(\|H_i(\theta)\|_2^2 + \|\delta_{n+1}(\theta)\|_2^2 \ + \ 2\beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta)^T H_i(\theta)\Big), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{S}_i(\theta)\|_2^2 = \frac{1}{(n+1)^2}\Big(&H_i^T(\theta)\widetilde{R}_{n+1}^{-1}H_i(\theta) + \delta_{n+1}(\theta)^T\widetilde{R}_{n+1}^{-1}\delta_{n+1}(\theta) + \\ &+ 2\beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta)^T\widetilde{R}_{n+1}^{-1}H_i(\theta)\Big);\end{aligned} \tag{7}$$

для *механизмов второго типа*:

$$\widetilde{H}_i(\theta) = H_i(\theta) + \beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta) - \beta_{i,1}\delta_1(\theta), \tag{8}$$

$$\widetilde{S}_i(\theta) = \frac{1}{n}\,\widetilde{R}_n^{-1/2}(H_i(\theta) + \beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta) - \beta_{i,1}\delta_1(\theta)), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{H}_i(\theta)\|_2^2 = \|H_i(\theta)\|_2^2 + \|\delta_{n+1}(\theta)\|_2^2 + \|\delta_1(\theta)\|_2^2 - 2\beta_{i,n+1}\beta_{i,1}\delta_{n+1}^T(\theta)\delta_1(\theta) + \\ + 2H_i^T(\theta)(\beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta) - \beta_{i,1}\delta_1(\theta)),\end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{S}_i(\theta)\|_2^2 = \frac{1}{n^2}\Big(& H_i^T(\theta)\widetilde{R}_n^{-1}H_i(\theta) + \delta_{n+1}(\theta)^T\widetilde{R}_n^{-1}\delta_{n+1}(\theta) + \\
&+ \delta_1(\theta)^T\widetilde{R}_n^{-1}\delta_1(\theta) - 2\beta_{i,n+1}\beta_{i,1}\delta_{n+1}^T\widetilde{R}_n^{-1}(\theta)\delta_1(\theta) + \\
&+ 2H_i^T(\theta)\widetilde{R}_n^{-1}(\beta_{i,n+1}\delta_{n+1}(\theta) - \beta_{i,1}\delta_1(\theta))\Big).
\end{aligned} \tag{11}
$$

2.4.4. Особенности, возникающие во втором случае

Второй случай позволяет сделать дополнительное предположение для бóльшего упрощения вычислений: отказаться от генерации $\{\beta_{i,n+1}\}_{i=1}^m$ путем присвоения им значений знаков первой знаковозмущенной суммы, т.е. $\beta_{i,n+1} := \beta_{i,1}$. Соответственно необходимо проверить, какую погрешность будет давать такой подход. После подобной замены формулы (8) – (11) приобретают вид

$$
\widetilde{H}_i(\theta) = H_i(\theta) + \beta_{i,1}(\delta_{n+1}(\theta) - \delta_1(\theta)), \tag{12}
$$

$$
\widetilde{S}_i(\theta) = \frac{1}{n}\,\widetilde{R}_n^{-1/2}(H_i(\theta) + \beta_{i,1}(\delta_{n+1}(\theta) - \delta_1(\theta))), \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{H}_i(\theta)\|_2^2 =& \|H_i(\theta)\|_2^2 + \|\delta_{n+1}(\theta)\|_2^2 + \|\delta_1(\theta)\|_2^2 - 2\delta_{n+1}^T(\theta)\delta_1(\theta) + \\
&+ 2\beta_{i,1}H_i^T(\theta)(\delta_{n+1}(\theta) - \delta_1(\theta)),
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{S}_i(\theta)\|_2^2 =& \frac{1}{n^2}\Big(H_i^T(\theta)\widetilde{R}_n^{-1}H_i(\theta) + \delta_{n+1}(\theta)^T\widetilde{R}_n^{-1}\delta_{n+1}(\theta) + \\
&+ \delta_1(\theta)^T\widetilde{R}_n^{-1}\delta_1(\theta) - 2\delta_{n+1}^T\widetilde{R}_n^{-1}(\theta)\delta_1(\theta) + \\
&+ 2\beta_{i,1}H_i^T(\theta)\widetilde{R}_n^{-1}(\delta_{n+1}(\theta) - \delta_1(\theta))\Big).
\end{aligned} \tag{15}
$$

2.5. Пример итеративного алгоритма

Приведем пример итеративного алгоритма, использующего полученные соотношения и предназначенного для последовательной обработки поступающих данных. Алгоритм 2 решает следующую задачу:

при поступлении нового наблюдения требуется построить апроксимирующую область, которая заведомо ограничивает новую доверительную область.

Алгоритм 2

Шаг 1) к начальным данным применить *алгоритм 1*;
получить $\widehat{\Theta}_n$ – p-доверительную область;

Шаг 2) при получении нового наблюдения y_{n+1}, полученного в известной точке φ_{n+1} согласно механизму обработки нового наблюдения:

- **Шаг 2.1)** вычислить $\hat{\theta}_n$ при помощи МНК;
- **Шаг 2.2)** пересчитать регуляризующую матрицу при помощи формул, описанных в 2.3.2 и 2.3.3;
- **Шаг 2.3)** в случае, если выбран механизм первого типа: сгенерировать $\{\beta_{i,n+1}\}_{i=1}^m$
- **Шаг 2.4)** для точек, лежащих на границе $\widehat{\Theta}_n$, пересчитать нормы знаковозмущенных сумм согласно (6), (14)
- **Шаг 2.5)** вычислить $Rank(\theta)$ с учетом новых значений норм знаковозмущенных сумм;
  - **Шаг 2.5.1)** в том случае, если $Rank(\theta)$ оказывается больше $(m - q)$: найти минимальное значение $\lambda \in [1; +\infty)$, при котором $Rank(\lambda\theta + (1 - \lambda)\hat{\theta}) \leq m - q$ и обновить значение θ;
  - **Шаг 2.5.2)** иначе сохранить изначальное значение θ
- **Шаг 2.6)** ограничивающую область можно задать как выпуклую оболочку множества полученных точек

Шаг 3) при необходимости вернуться у шагу 2

3. Общее описание и функциональность системы

Языком программирования, использованным при реализации, был выбран Python версии 3. Использовались библиотеки NumPy, SciPy для реализации модели и вычислений, Matplotlib для построения графиков.

Система реализует исходный и итеративные алгоритмы. Также она реализует возможность получать данные о времени работы каждого из алгоритмов и их отдельных составляющих, получать сравнения их различных выходных и промежуточных данных. В качестве входных данных алгоритмам можно как подавать заранее известные массивы (параметров, наблюдений и т.д.), так и генерировать их случайным образом. Также выходными данными работы системы могут являться сами промежуточные результаты работы алгоритмов для последующего воспроизведения и анализа их работы.

Заключение

В работе решены следующие задачи:

- Выведены рекуррентные соотношения для одного из базовых алгоритмов, основанных на методе знаковозмущенных сумм;
- Разработана система для моделирования применения итеративных модификаций;
- С помощью разработанной системы выведенные соотношения протестированы на предмет их эффективности;
- Получены представления о границах применения подобных соотношений в работе алгоритмов

3.1. Полученные результаты

При решении поставленных задач получены следующие результаты:

- Показано, что полученные в ходе исследования соотношения имеют общий характер для всех алгоритмов, построенных на основе метода знаковозмущенных сумм, и, соответственно, могут быть обобщены на них.
- На основе выведенных соотношений получены некоторые итеративные модификации алгоритмов.
- Полученные модификации реализованы.
- Предложены гипотезы относительно поведения данных, получаемых при рекуррентном подходе.
- При помощи разработанной системы проведена проверка предложенных гипотез на частных случаях.
- Проведено сравнение результатов работы оригинальных методов и их итеративных модификаций.

3.2. Дальнейшее развитие

В дальнейшем планируется теоретически обосновать предложенные гипотезы либо показать их несостоятельность в общем случае. Особое внимание планируется уделить развитию итеративных модификаций, а именно – получить возможность более точно оценивать возможную погрешность в их работе. В случае, если такая возможность будет реализована, можно будет производить работу алгоритмов с превентивным учетом этих погрешностей, т.е. в ходе работы алгоритмов корректировать получаемые результаты.

Список литературы

[1] A. Caré B.C. Csaji M.C. Campi. Sign-perturbed sums (SPS) with asymmetric noise: robustness analysis and robustification techniques. // Proc. 55th Conf. on Decision and Control.

[2] B.C. Csaji M.C. Campi, Weyer. E. Sign-Perturbed Sums (SPS): A Method for Constructing Exact Finite-Sample Confidence Regions for General Linear Systems. // Proc. 51st Conference on Decision and Control.

[3] B.C. Csaji M.C. Campi, Weyer. E. Sign-Perturbed Sums: A New System Identificaiton Approach for Contructing Exact Non-Asymptotic Confidence Regions in Linear Regression Models.. // IEEE Trans. on Signal Processing. — 2015. — Vol. 63, no. 1. — P. 169–181.

[4] Bartlett. M. S. An Inverse Matrix Adjustment Arising in Discriminant Analysis. // Ann. Math. Statist. — 1951. — Vol. 22, no. 1. — P. 107–111. — URL: http://marco-campi.unibs.it/pdf-pszip/Automatica-SPS-asymptotics.pdf.

[5] E. Weyer M.C. Campi B.C. Csaji. Asymptotic properties of SPS confidence region. // Automatica. — Vol. 82.

[6] M. Kieffer E.Walter. Guaranteed characterization of exact non-asymptotic confidence regions as defined by LSCR and SPS. // Automatica. — Vol. 49.

[7] М.В. Волкова. Рандомизированные алгоритмы оценивания параметров инкубационных процессов в условиях неопределенностей и конечного числа наблюдений : Ph. D. thesis / Волкова М.В. ; Санкт-Петербургский государственный университет.